時系列解析入門 – スペクトルとピリオドグラム

1. スペクトル

ラグkが大きくなると自己共分散関数C_kが急速に減衰し$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|<\infty$が成り立つとき、$C_k$のフーリエ変換(Fourier transform)が定義できる。このとき、周波数$-\frac{1}{2}\le f\le\frac{1}{2}$上で定義される関数$p(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{-2\pi ikf}$はパワースペクトル密度関数(power spectral density function)あるいはスペクトル(spectrum)と呼ばれる。自己共分散関数は偶関数で$C_k=C_{-k}$が成り立つことから、スペクトルは、

$$p(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cos 2\pi kf=C_0+2\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos 2\pi kf$$

とも表現できる。スペクトルは時系列の変動をさまざまな周期の三角関数で表現するとき、それらがどのような割合で含まれているかを表現していると考えることができる。逆にスペクトルが与えられると、自己共分散関数はフーリエ逆変換によって以下となる。

$$C_k=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}p(f)e^{2\pi ikf}df=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}p(f)\cos 2\pi kf\,df$$

ホワイトノイズの場合：自己共分散関数は$C_0=\sigma^2$、$C_k=0(k\ne 0)$で与えられる。スペクトルは、

$$p(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cos 2\pi kf=C_0=\sigma^2$$

となるので、fによらず一定である。これはホワイトノイズがいろいろな周波数の波を同じ割合で含んでいることを示している。

自己回帰モデルの場合：ω_nを分散σ^2のホワイトノイズとする。時系列が、$y_n=ay_{n-1}+\omega_n$（1 次の自己回帰モデル）に従って生成されている場合には、自己共分散関数は、

$$C_k=\sigma^2\left(1-a^2\right)^{-1}a^{|k|}$$

で与えられ、この時系列のスペクトルは、

$$p(f)=\frac{\sigma^2}{\left|1-ae^{-2\pi if}\right|^2}=\frac{\sigma^2}{1-2a\cos 2\pi f+a^2}$$

となる。

また、時系列が $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \omega_n$ （2 次の自己回帰モデル）に従う場合には、自己相関関数は、

$$R_1 = \frac{a_1}{1 - a_2}$$

$$R_2 = a_1 R_{k-1} + a_2 R_{k-2}$$

により求められ、スペクトルは、

$$p(f) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - a_1 e^{-2\pi i f} - a_2 e^{-4\pi i f}\right|^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{1 - 2a_1(1 - a_2)\cos 2\pi f - 2a_2 \cos 4\pi f + a_1^{\ 2} + + a_2^{\ 2}}$$

となる。

2. ピリオドグラム

時系列 $y_1, \ldots, y_N$ が与えられたとき、スペクトルに標本自己共分散関数を代入して得られる、

$$p_j = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{C}_k e^{-2\pi i k f_j} = \hat{C}_0 + 2\sum_{k=1}^{N-1} \hat{C}_k \cos 2\pi k f_j$$

をピリオドグラム(periodogram)と呼ぶ。周波数は $f_j = j/N$, $j = 0, \ldots, [N/2]$ で表される自然周波数だけが考慮される。$[N/2]$ は $N/2$ を超えない最大の整数を表す。またピリオドグラムの定義域を連続区間に拡張した、

$$\hat{p}(f) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{C}_k e^{-2\pi i k f}, -0.5 \le f \le 0.5$$

は標本スペクトル(sample spectrum)と呼ばれる。ピリオドグラムは標本スペクトルを自然周波数だけについて求めたものともいえる。標本スペクトルと標本自己共分散関数の間には次のような関係が成り立つ。

$$\hat{C}_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{p}(f) e^{2\pi i k f} df, k = 0, \ldots, N-1$$

以下省略