空間的相互作用モデル

重力モデル

ある都市iから都市jへの人の流動は、都市iの人口をP_i、都市jの人口をP_j、両者の間の距離をd_{ij}とすれば$P_i P_j / d_{ij}$に比例すると考えられる。

一般に、現実の空間的相互作用量I_{ij}と、説明要因としての距離を都市規模との関係は、

$$\log I_{ij} = a + b \log\left(P_i P_j / d_{ij}\right)$$

$$I_{ij} = a' \left(\frac{P_i P_j}{d_{ij}} \right)^b 0$$

と表せる。
この式は、Newton の重量法則、すなわち物質Mとmふたつの粒子が距離d離れて存在すれば、その互いに引きあう力Fは、

$$F = G \left(\frac{Mm}{d^2} \right)$$

に類似している。そこで、都市あるいは地域の流動現象を記述する重力モデルが次のように定義される。

$$I_{ij} = k \frac{P_i P_j}{d^b{}_{ij}}$$

エントロピー最大化型空間的相互作用モデル

ここではミクロ・メソ・マクロの三つの集計レベルを区別する。
都市内部通勤流動を例に取ると、ミクロレベルでは各通勤者が負担する通勤費用など、各人の諸属性が住宅地区iと就業地区jごとに細かく記録される。メソレベルになると、個人は区別されることなく、住宅地区iに住み就業地区jで働く通勤者の総数T_{ij}が記録される。通勤費用も地区間を通勤する人々の平均c_{ij}が記録される。マクロレベルでは都市全体の特徴と各地区の特徴が記録される。例えば各住宅地区における通勤者数、各就業地区における就業機会数、都市全体の通勤者総数N、全通勤者の総通勤費用Cなどである。

ここでメソレベルでのT_{ij}を推定する。ミクロレベルの情報は入手不可能あるいは不完全であるため個々人の行動についてできる限りの何の先入観も持たないことにする。このことは我々がミクロレベルの事象に関し不確かであること認めることである。ミクロレベルにおける通勤者における我々の先入観を最小にし、すなわち不確かさを最大にし、メソレベルにおける現象である地区間通勤流動を推定することは、次式の総数Nの中からそれぞれのT_{ij}を選ぶ場合の組み合わせの数$W(T_{ij})$の最大値をみつけることに相当する。

$$W(T_{ij}) = {}_{N}C_{T_{11}} \cdot {}_{N-T_{11}}C_{T_{12}} \cdot {}_{N-T_{11}-T_{12}}C_{T_{13}} \cdot .....$$
$$= \frac{N!}{T_{11}!T_{12}!T_{13}!....} = \frac{N!}{\prod_{ij} T_{ij}!}$$

しかしその際、トリップ分布はいかなるマクロレベルの情報ないし過程とも矛盾しないことが必要である。それは以下の通勤流出量、通勤流入量に関する制約条件（それぞれが現実の値と一致すること）に反映される。

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij} = O_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} T_{ij} = D_j$$

ただし、O_iは発地区iから流出する通勤者数、D_jは着地区jに流入する通勤者数、nは地区の総数である。さらに次のような費用の制約（総通勤費用は所与であること）を条件として付け加える。

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T_{ij} c_{ij} = C$$

これらの制約のもとで$W(T_{ij})$の最大値をもつものが最も実現しやすい通勤流動である。

$W(T_{ij})$は地区の数をnとすれば、総数N個の通勤者を$n \times n$種類の組み合わせに配分する場合の数に他ならない。また$W(T_{ij})$は考え方の上ではN個の分子を、あるマクロ状態において分子が取りうる可能なすべてのミクロ状態に配分する場合の数、すなわち統計力学的エントロピーと等価である。さらに$W(T_{ij})$は情報エントロピーとも関連があり、ここでは$W(T_{ij})$をエントロピーと名づけることにする。

$W(T_{ij})$の最大値を与える通勤流動を求めるには、

$$W(T_{ij}) = {}_N C_{T_{11}} \cdot {}_{N-T_{11}} C_{T_{12}} \cdot {}_{N-T_{11}-T_{12}} C_{T_{13}} \cdot \ldots\ldots$$
$$= \frac{N!}{T_{11}!T_{12}!T_{13}!\ldots\ldots} = \frac{N!}{\prod_{ij} T_{ij}!}$$

の両辺を自然対数変換し、Stirling の公式（N が十分大きいとき、$\ln N! \cong N \ln N - n$）を適用し、

$$\ln W(T_{ij}) = N \ln N - N - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(T_{ij} \ln T_{ij} - T_{ij}\right)$$

とした後、一定の制約条件のもとで目的関数の最大値を求める問題を解く場合に用いられる Lagrange の未定乗数法を適用し、

$$T_{ij} = A_i O_i B_j D_j \exp(-\beta c_{ij})$$

が誘導される。ただしβは距離パラメータ、次式で定義されるA_i、B_jはモデルによって推定されるO_i、D_jがデータの値と一緒になるように調整機能を果たす、発地依存均衡因子、着地依存均衡因子である。

$$A_i = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} B_j D_j \exp(-\beta c_{ij})$$
$$B_j = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} A_i O_i \exp(-\beta c_{ij})$$

またここで、$\exp(-\beta c_{ij})$は距離の摩擦効果を示す距離減衰関数であり、重力モデルではパレート関数d_{ij}^{-b}に相当する。また通常、発地区iから流出する通勤者数O_i、着地区jに流入する通勤者数D_jは地区i、jの規模に比例するため、空間的相互作用モデルと重力モデルは構造的に同一とみなされる。

重力モデルとエントロピー最大化型空間的相互作用モデルを比較すると、後者のほうが各都市のO_i、D_j、全通勤者数が現実のものと一致している。これは後者が各種制約条件を満たすためにA_i、B_jという二つの均衡因子をモデルが内包しているためであり、二重制約型空間的相互作用モデルと呼ばれる。O_iのみの制約ないしはD_jのみの制約を有するモデルは、

それぞれ発生制約型空間的相互作用モデル、吸収制約型空間的相互作用モデルとよばれる。両者は一括して一重制約型空間的相互作用モデルとよばれ、一方重力モデルは非制約型空間的相互作用モデルとよばれる。

重力モデルの応用による商圏モデル

（小売重力モデル）

商圏とは、当該都市の商業（卸売、小売活動）の勢力が及ぶ範域のことである。商圏構造を把握するために、大量のアンケート調査などを配布せずに理論的に商圏を画定するための方法として、小売重力モデルがある。

今、人口 P_a の都市 A と人口 P_b の都市 B の間に人口 P_c の都市 C が位置し、都市 C の住民の買物によってもたらされる都市 A 、都市 B それぞれの小売売上高 B_a 、 B_b が $k=1$ の重力モデルで推定されるとする。 B_a と B_b の比は、

$$\frac{B_b}{B_a}=\frac{P_aP_c}{{d_{ac}}^b}\bigg/\frac{P_bP_c}{{d_{bc}}^b}=\frac{P_a}{P_b}\left(\frac{d_{bc}}{d_{ac}}\right)^b$$

となる。ところで上の式の左辺が 1 に等しいことは、都市 C の住民の買物によって都市 A と都市 B にもたらされる小売売上高が等しいことを意味している。このとき、都市 C において両都市の商業勢力が均衡する結果、都市 C は両都市の商圏の境界点となる。仮に $b=2$ とすると、都市 A の商圏境界までの距離 d_{ac} は次のように求められる。

$$1=\frac{P_a}{P_b}\left(\frac{d_{bc}}{d_{ac}}\right)^2$$

$$=\frac{P_a}{P_b}\left(\frac{d_{ab}-d_{ac}}{d_{ac}}\right)^2$$

……

$$d_{ac}=d_{ab}\bigg/\left(\sqrt{\frac{P_a}{P_b}}+1\right)$$

b は現実の商圏と良くあてはまるように計算しなければならない。

（確率商圏モデル）

ある都市の商圏が近隣の都市を飛び越えてそれの外方に広がっている現象のことを、潜上現象と呼ぶ。隣接する二つの商圏のみを問題とする小売重力モデルは潜上現象を扱えない。また商圏は一本の線ではなく、消費者の当該都市購買確率等直線で表されるべきであるといえる。そこで Huff の確率商圏モデル（通称ハフモデル）を用いる。

今、消費者 i が選択可能な n 個の商店街（中心地）の中から商店街（中心地） j を選択する

確率 p_{ij} は、彼がその商店街（中心地）に関して持つ効用（消費者が財やサービスの消費から得る満足度） μ_{ij} に比例すると仮定する。

$$p_{ij} = \mu_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}$$

ただし、 $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ 、 $0 \leq p_{ij} \leq 1$ である。そして消費者 i が商店街（中心地） j に関して持つ効用 μ_{ij} は商店街（中心地）の規模 s_j （多くの場合総売場面積）に正比例し、消費者 i の居住地から商店街（中心地） j までの距離 t_{ij} （多くの場合時間距離）の λ 乗に反比例するものとする。

$$\mu_{ij} = s_j \big/ {t_{ij}}^{\lambda}$$

そこでこの式を $p_{ij} = \mu_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}$ へ代入すると、

$$p_{ij} = \left(s_j \big/ {t_{ij}}^{\lambda} \right) \Big/ \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(s_j \big/ {t_{ij}}^{\lambda} \right) \right\}$$

という確率商圏モデルが誘導される。このモデルは小売重力モデルを確率操作化したものである。 λ はデータに即して数値計算により求めなければならない。一般に、消費者が家の近くで購入し、購入頻度が高い最寄品の λ の値は大きく、遠くまで出かけて購入し、購入頻度が小さい買回品のそれは小さい。

なお、確率商圏モデルに、重力モデルではなく、構造的に同じである空間的相互作用モデルを用いることは可能であると考えられる。